

Foucaultovo nihalo

Uvod

Od pradavnine vemo, da se na zemlji menjata dan in noč v enakomernih časovnih intervalih (24 ur). Dolgo časa je veljalo, da je to posledica tega, ker se sonce giblje okoli zemlje. Kopernik leta 1514 in kasneje leta 1610 Galilei sta na podlagi svojih astronomskih opazovanj potrdila, da Zemlja ne miruje, ampak da je del Sončnega sistema in da se enako kot ostali planeti giblje okoli sonca (heliocentrični sistem). Leta 1851, ko je Leon Foucault predstavil nihalo, je bilo že povsem znano, da se zemlja vrti[1]. Eden od posrednih dokazov so bile globalne geografske meritve, ki so pokazale, da je zemlja zaradi rotacije rahlo sploščena na polih. Foucaultovo nihalo je enostaven, neposreden in prepričljiv poskus, ki je pokaže, da se zemlja vrti okoli svoje osi. Če na nihalo ne delujejo zunanje sile, potem nihalo niha ves čas v isti ravnini. Tak sistem imenujemo inercialni sistem. V primeru, da opazimo vrtenje ravnine nihanja (precesije), potem lahko sklepamo, da se vrti okolje, v katerem se nihalo nahaja (neinercialni sistem).

Če opazujemo nihalo iz neinercialnega sistema, ki se vrti na obodu zemlje, potem moramo za pravilen opis nihanja upoštevati še Coriolisovo silo. Coriolisova sila je fiktivna sila, ki jo vpeljemo zaradi rotacije neinercialnega sistema po sledečem postopku. Da je opis enostavnejši, postavimo izhodišče našega sistema na prijemališče vrvice na stropu. Poravnamo osi x' , y' in z' tako, da x' poteka po vzporedniku, y' po poldnevniku in z' proti središču zemlje. Pozicijo krogle označimo z vektorjem $\mathbf{r}'$. Projekcija $\mathbf{r}'$ na ravnino x',y' nam bo pokazala ravnino nihanja krogle. Z opazovanjem te projekcije bomo izmerili precesijo. Pozicija krogle glede na sistem ki miruje in ima izhodišče v središču zemlje je

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{r}'(t)$$

kjer je $\mathbf{R}(t)$ vektor iz središča zemlje do izhodišča našega neinercialnega sistema in $\mathbf{r}'(t)$ je vektor od izhodišča našega sistema do krogle. S tem določimo vektor $\mathbf{r}(t)$ v inercialnem sistemu, ki ima izhodišče v središču zemlje in nam opiše gibanje krogle.

Ta sistem se ne vrti. Ko računamo časovni odvod moramo paziti na to, da so smerni enotski vektorji ($\mathbf{e}_i$) sistema na obodu časovno odvisni:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} + \sum r'_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i) + \sum \frac{dr'_i}{dt} \mathbf{e}'_i \quad \mathbf{r}' = r'_1 \mathbf{e}'_1 + r'_2 \mathbf{e}'_2 + r'_3 \mathbf{e}'_3 \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

V katerem nastopi vrtilna hitrost zemlje – vektor, ki je usmerjen v smeri severnega pola. Da se pokazati, da je časovni odvod tako $\mathbf{R}$ kot $\mathbf{r}'$ enak vektorskemu produktu z vrtilno količino zemlje. Če želimo poiskati Coriolisovo silo, moramo izračunati pospešek:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + \sum r'_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i) + 2 \sum \frac{dr'_i}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i) + \sum \frac{d^2r'_i}{dt^2} \mathbf{e}'_i$$

Prva dva člena na desni predstavljata centrifugalni pospešek, ki vrti kroglo okoli osi vrtenja zemlje. Združimo jih v $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}'))$. To lahko zapišemo kot $(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R} + \mathbf{r}'))\boldsymbol{\omega} - \omega^2(\mathbf{R} + \mathbf{r}')$. Oba sta odvisna od ω^2 in ne povročata precesije. Tretji člen predstavlja Coriolisov pospešek ($2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$) in je odvisen od hitrosti ki jo izmerimo v našem sistemu. Ta člen je kriv za precesijo, saj kaže izven ravnine nihanja. Zadnji člen predstavlja pospešek, ki ga izmerimo v našem sistemu ($\mathbf{a}'$). Na levi strani enačbe stoji pospešek, ki ga po II. Newtonovem zakonu povzroča vsota vseh sil na kroglo, deljena z maso krogle. Med te sile štejemo gravitacijsko silo in silo vrvice. Gravitacijska sila vleče kroglo v nasprotni smeri vektorja $\mathbf{R} + \mathbf{r}'$. Ta sila kaže natanko proti središču zemlje, njena velikost je m krat g , kjer je m masa krogle. Druga sila je sila vrvice, ki natanko izenači tisti del gravitacijske sile, ki deluje vzdolž vrvice. Velikost te sile dobimo z skalarnim produktom med dvema vektorjema, smer je določena z $\mathbf{r}'$. Leva stran enačbe se glasi:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}'}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}'|} + g \frac{(\mathbf{R} + \mathbf{r}')\mathbf{r}'}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}'||\mathbf{r}'|} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = -g \frac{\mathbf{R} + (R \cos(\vartheta))\mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}'|}$$

kjer je ϑ kot med vektorjem $\mathbf{R}$ in $\mathbf{r}'$. Če sedaj združimo levo in desno stran enačbe, dobimo enačbo

$$-g \frac{\mathbf{R} + (R \cos(\vartheta))\mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}'|} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}')) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}'$$

V primeru da krogla ne niha, potem bo $\mathbf{v}'$ in $\mathbf{a}'$ nič. Z $\mathbf{r}'_0$ bomo označili mirovno lego, ki jo dobimo iz enačbe, ko je gravitacijska sila izenačena z centrifugalno silo.

$$-g \frac{\mathbf{R} + (R \cos(\vartheta_0)) \mathbf{r}'_0 / |\mathbf{r}'_0|}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}'_0|} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_0))$$

Nihalo se za malenkost odkloni proč od osi vrtenja zemlje. V krogelnih koordinatah označimo $\mathbf{R}(R, \psi, \Omega)$ in $\mathbf{r}'(r', \varphi, \vartheta)$. Kot φ označuje ravnino nihanja. Nato izrazimo vektorja $\mathbf{R}$ in $\boldsymbol{\omega}$ v neinercialnem sistemu kot

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \cos(\Omega) \mathbf{e}'_3 - \omega \sin(\Omega) \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{R} = -R \mathbf{e}'_3$$

Predpostavimo da je $\mathbf{R} + \mathbf{r}' \approx \mathbf{R}$, saj je radij zemlje dosti večji kot je dolžina nihala. Leva stran se ob tej predpostavki poenostavi v $-g \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta$, kar ustreza pospešku, ki vrača nihalo v mirovno lego. Ta pospešek je v mirovni legi enak centrifugalnemu pospešku zaradi vrtenja zemlje, ki ob prejšnji predpostavki znaša $\omega^2 R \sin(\Omega)$, kjer je Ω kot med $\mathbf{R}$ in $\boldsymbol{\omega}$. Smer tega pospeška je pravokotna na os vrtenja zemlje. V mirovanju kot znaša

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\omega^2 R}{g} \sin(2\Omega) \right) \approx 0.0017 \cdot \sin(2\Omega) < 0.1^\circ$$

Ker je ta kot zanemarljivo majhen, predpostavimo da je krogla v mirovanju usmerjena natanko proti središču zemlje. Ob zgornjih dveh predpostavkah, se enačba poenostavi:

$$\mathbf{a}' = -g \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

Pri tem smo prenesli Coriolisov pospešek na drugo stran in enačbo obrnili. Prvi pospešek na desni strani kaže vedno proti mirovni legi nihala, drugi člen pa kaže vedno pravokotno na hitrost nihanja, zato vrta ravnino nihanja. Zapišimo sedaj nihanje v krogelnih koordinatah neinercialnega sistema:

$$\mathbf{r}' = r' \cdot \mathbf{e}'_r(\varphi, \vartheta) \quad \varphi(t) = \omega_p t \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 \exp(-i\omega_0 t)$$

kjer vpeljemo ω_0 in ω_p , ki sta frekvenca nihanja in kotna hitrost precesije. Predpostavimo, da je amplituda nihanja majhna ($\vartheta_0 \ll 1$), tedaj enačbo poenostavimo

z upoštevanjem približka $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$ in $\cos(\vartheta) \approx 1$. Že samo po komponent x' dobimo dve enačbi, ki izhajata iz enakosti realne in imaginarne komponente:

$$\begin{aligned}\omega_0^2 + \omega_p^2 &= g/r', \\ \omega_p &= \omega \cdot \cos(\Omega)\end{aligned}$$

Iz tega opazimo, da je precesija odvisna od zemljepisne širine in da je frekvenca nihanja nihala zmanjšana za malenkost zaradi precesije.

Hipoteza

1. Z merjenjem precesije nihala želimo izračunati zemljepisno širino.
2. Z merjenjem nihajnega časa nihala želimo izračunati gravitacijski pospešek.

Opis meritve

Nihalo je sestavljeno iz krogle teže 50 kg, ki je obešena na 11 m dolgo žico. Nihajni čas nihala merimo s štoparico. Merimo čas več nihajev in s tem zmanjšamo napako meritve, ki nastane zaradi zakasnitve refleksa roke. Meritev precesije merimo s pomočjo sence, ki jo meče krogla ob osvetlitvi z usmerjeno svetlobo.

Navodila

Previdno stopi na okrasno ploščo pod nihalom. Hodi le po robu plošče. Na ploščo pod nihalo položi bel list papirja in ga pritrdi z lepilnim trakom, da se ne bo premikal. Označi mirovno pozicijo nihala. Nato nihalo zveži z vrvico in počakaj nekaj minut da se umiri. Označi začetno pozicijo nihala na spodnjem papirju. Nato prežgi vrvico in zažni meriti čas.

- Za meritev nihajnega časa nihala, izmeri čas, ki ga porabi nihalo za deset nihajev in ga deli z deset. Meritev nihajnega časa ponovi deset krat. Pri tem ne ustavlja nihala.

- Smer nihanja (precesijo) izmeri vsake pol ure. Označi ravnino nihanja takoj ko prežgeš vrvico. Meri vsaj štiri krat, tako da boš opazoval nihalo vsaj 120 minut. Pri vsaki meritvi oceni napako meritve.

Analiza meritev

- Na grafu predstavi kot nihanja kot funkcijo časa opazovanja od začetka nihanja. Vsako meritev predstavi z točko in z napako (*ang. errorbar*). Poišči premico, ki najbolj ustreza meritvam. Koeficienta modela poišči z metodo najmanjših kvadratov [2, 3]. Premico prikaži na grafu in razloži vrednosti in pomen koeficientov. Izračunaj frekvenco precesije in določi zemljepisno širino, ki temu ustreza.
- Na histogramu prikaži porazdelitev nihajnih časov. Preveri ali njihova porazdelitev ustreza Gaussovi porazdelitvi. Parametre Gaussove porazdelitve določi z metodo najmanjših kvadratov. Gaussovo porazdelitev prikaži na histogramu. Iz podatkov, ki jih imaš o nihalu, izračunaj velikost gravitacijskega pospeška.
- (Dodatno) Frekvenco precesije in nihanja nihala si izmeril z določeno napako. Prikaži, kako s pomočjo teh dveh napak izračunaš napako gravitacijskega pospeška. (Glej razširjanje napak).

Literatura

1. Wikipedia. 2013; vir: http://en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum.
2. Wolfram. 2013; vir: <http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/LinearModelFit.html>.
3. SciPy. 2013; vir: http://python4mpia.github.io/fitting_data/least-squares-fitting.html.